Trabajo Práctico Nro. 6

Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

1. Formular en cada caso, el correspondiente problema en términos de una ecuación diferencial en derivadas parciales con condiciones iniciales y/o de contorno.
   (a) La temperatura en estado estacionario en una placa plana y homogénea que se extiende en el primer cuadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$ si la temperatura sobre el lado horizontal es cero y la temperatura sobre cada punto y del semi-eje vertical es e^{-y}.
   (b) La temperatura en estado estacionario en una placa plana y homogénea que cubre la banda $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 2$ si los lados izquierdo e inferior están aislados y en cada (x, y) del lado superior toma el valor $f(x)$.
   (c) El potencial electrostático en un medio dieléctrico homogéneo que se encuentra entre dos conductores cilíndricos concéntricos y de longitud infinita, sabiendo que el conductor interior de radio r_1 se encuentra cargado a un potencial V_1, y el exterior de radio r_2 a un potencial V_2.
   (d) La temperatura en una barra de hierro, una vez aislada, si primero está inmersa en vapor hasta que su temperatura es $u_0 = 100^oC$ y a partir de ese momento, su superficie lateral es aislada y sus dos extremos se sumergen en hielo a 0^oC. Suponer que la barra tiene una longitud de $L = 50$ cm y, que la constante de difusividad térmica del hierro es igual a 1.5.
   (e) La distribución de temperatura en una barra como la del ítem anterior pero siendo que su temperatura inicial es proporcionada por medio de una función $f(x)$. En el tiempo $t = 0$ tanto su superficie lateral como sus dos extremos son aislados.
   (f) Las vibraciones de una membrana rectangular que cubre la región $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ si en cada punto (x, y) la posición inicial es $f(x, y)$ y la velocidad inicial es $g(x, y)$. La membrana está atada a un marco rígido a lo largo de la frontera de la región y se supone conocida la velocidad de propagación del medio.
   (g) El movimiento de una cuerda elástica de longitud L, atada en ambos extremos y soltada desde el reposo con una posición inicial dada por $f(x)$. La cuerda vibra en el plano xy y se da por conocida su velocidad de propagación. Su movimiento es contrarrestado por la resistencia del aire, que tiene una fuerza en cada punto de magnitud proporcional al cuadrado de la velocidad en ese punto.

2. (a) Probar que $u(x, t) = \operatorname{sen}(n\pi x/L) \cos(n\pi c\, t/L)$ satisface la ecuación de onda unidimensional para cualquier entero n.
   (b) Probar que $u(x, y, t) = \operatorname{sen}(nx) \cos(my) \cos(\sqrt{n^2 + m^2} c\, t)$ satisface la ecuación de onda bidimensional para cualesquiera enteros n y m.

3. (a) Demostrar que la función $u(x,t) = f(2x+5t) + g(2x-5t)$, donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones dos veces derivables en $\mathbb{R}$, es solución de la ecuación de ondas unidimensional $4u_{tt} - 25u_{xx} = 0$ para $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

   (b) Encontrar una solución particular de la ecuación de ondas del item anterior que verifique:

$$\begin{array}{lll} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para} & t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \operatorname{sen} 2x & \text{para} & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{array}$$

   ¿Es única?

   (c) Probar que $u(x,t) = \operatorname{sen} x \cos(c\,t) + (1/c) \cos x \operatorname{sen}(c\,t)$ satisface la ecuación de onda unidimensional,

$$u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt} \quad 0 < x < 2\pi, \quad t \geq 0$$

   junto con las condiciones de frontera

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = \frac{1}{c} \operatorname{sen}(c\,t) \quad \text{para}\, t \geq 0$$

   y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \operatorname{sen} x, \quad u_t(x,0) = \cos x \quad \text{para}\, 0 < x < 2\pi.$$

   ¿Es única?

4. Resolver mediante el método de D'Alembert el problema

$$\begin{array}{l} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad \text{para}\ -\infty < x < \infty. \end{array}$$

   en cada uno de los siguientes casos:

   (i) $c = 14,\ f(x) = e^x,\ g(x) = x$ (ii) $c = 15,\ f(x) = |x|,\ g(x) = e^{2x}$

5. (a) Verificar que las funciones $u_n(x,t) = e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(n\,x),\ n \in \mathbb{N}$ son soluciones de la ecuación del calor

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad \textit{para} \quad 0 < x < \pi \quad t \geqslant 0,$$

   con las condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \textit{para} \quad t \geqslant 0.$$

   (b) Verificar que $u(x,t) = \sum_{n=1}^{M} c_n\, u_n(x,t) \quad \forall M \geq 1$ satisface la ecuación y las condiciones anteriores.

   (c) Hallar los coeficientes c_n tales que $u(x,0) = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 5x$ para $0 < x < \pi$.

(d) Resolver el problema de (a) si además $u(x,0) = 80\,\text{sen}^3 x$ para $0 < x < \pi$.
(Sugerencia: escribir $\text{sen}^3 x$ como combinación lineal de funciones $\text{sen}\, nx$.)

(e) Analizar la unicidad de las soluciones de los dos ítems anteriores.

6. Probar que la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$u_t = ku_{xx} + Au_x + Bu$$

puede ser transformada en una ecuación de calor estándar mediante el cambio $u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t)$ con α y β elegidas adecuadamente.

7. (a) Verificar que las funciones $u_n(x,y) = \text{sh}(nx)\,\text{sen}\,(ny)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, satisfacen la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad para \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi,$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = u(x,\pi) = 0 & \text{para} & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ u(0,y) = 0 & \text{para} & 0 \leqslant y \leqslant \pi. \end{array}$$

(b) Mostrar que cualquier combinación lineal de las $u_n(x,y)$ es solución del problema de contorno del item anterior.

8. (a) Verificar que las funciones $u_0(x,y) = y$ y $u_n(x,y) = \cos(nx)\,\text{sh}(ny) \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ satisfacen la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad para \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi,$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{array}{lll} u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 & \text{para} & 0 \leqslant y \leqslant \pi, \\ u(x,0) = 0 & \text{para} & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{array}$$

(b) Resolver el problema del inciso (a) con $u(x,\pi) = 4 + 3\cos x - \cos 2x$ ¿Es la única solución?

Resolución de la ecuación de Laplace en el plano con condiciones de contorno seccionalmente constantes.

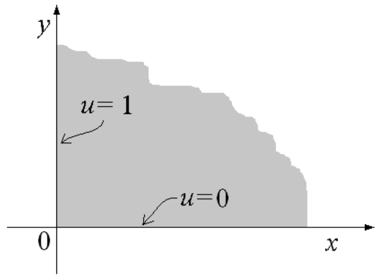
9. Hallar una función armónica $u(x,y)$ en el semiplano superior $\{\text{Im}(z) > 0\}$, según sean sus valores en el eje real:

$$\text{(i)}\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{(ii)}\ u(x,0) = \begin{cases} T_1 & x < a \\ T_2 & a \leq x \leq b \\ T_3 & x > b \end{cases}$$

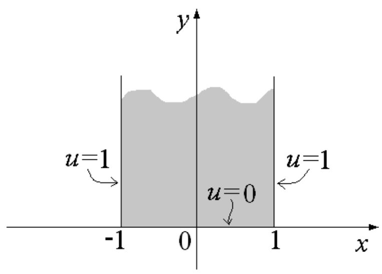
En ambos casos: ¿es la u hallada la única que verifica lo pedido?

10. Hallar una solución acotada de la ecuación de Laplace en las regiones indicadas y describir las equipotenciales y las líneas de fuerza (o de campo) para:

(i)
$$\begin{array}{lll} \nabla^2 u(x,y) = 0 & \text{para} & x>0 \ \wedge \ y>0 \\ u(0,y) = 1 & \text{para} & y>0 \\ u(x,0) = 0 & \text{para} & x>0 \end{array}$$

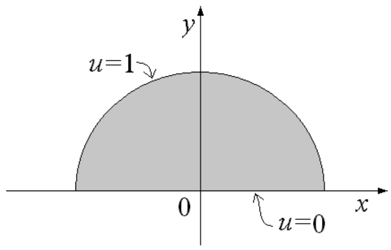


(ii)
$$\begin{array}{lll} \nabla^2 u(x,y) = 0 & \text{para} & |x|<1 \ \wedge \ y>0 \\ u(1,y) = 1 & \text{para} & y>0 \\ u(-1,y) = 1 & \text{para} & y>0 \\ u(x,0) = 0 & \text{para} & x\in(-1,1) \end{array}$$



11. Resolver:

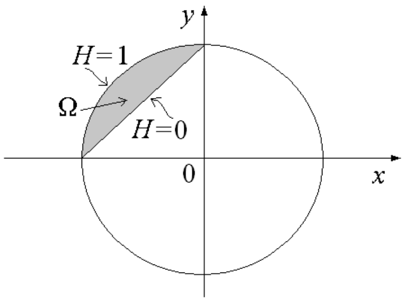
$$\begin{array}{lll} \nabla^2 u(x,y) = 0 & \text{para} & |x|<1 \ \wedge \ y>0 \\ u(x,0) = 0 & \text{para} & x\in(-1,1) \\ u(x,y) = 1 & \text{para} & x^2+y^2=1 \ \wedge \ y>0 \end{array}$$



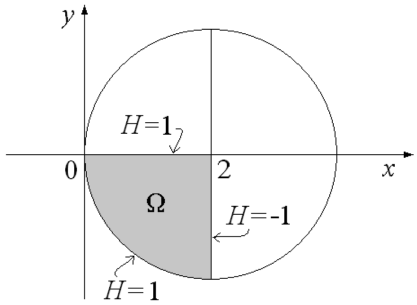
(Sugerencia: transformar el recinto en la figura del ejercicio 10 (i))

12. Resolver la ecuación $\nabla^2 H = 0$, en la región Ω que indican las figuras:

(i)



(ii)

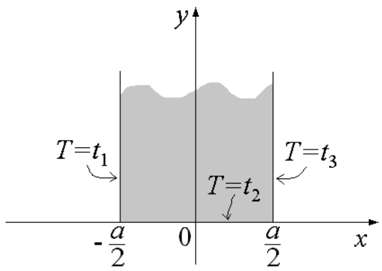


Nota: Los ejercicios siguientes describen problemas fisicos y por tanto, se requiere que la solución sea acotada. En todos, plantear el modelo matemático, graficar el recinto corrrespondiente, indicando las condiciones de contorno y resolver.

13. Hallar el potencial eléctrico en cada una de las siguientes situaciones y describir las líneas equipotenciales y las líneas de corriente:
    (a) En una región circular, si en la semicircunferencia superior es igual a 0 y en la inferior a 1.
    (b) En la banda infinita del plano, $0 < y < \pi$ si en la frontera toma el valor 0, salvo en el eje real positivo donde es igual a 1.

14. Encontrar la función de distribución de temperaturas en régimen estacionario para cada uno de los siguientes problemas, describiendo las líneas isotérmicas y las líneas de flujo:
    (a) En una placa semiinfinita con sus fronteras a las temperaturas indicadas.

$$\begin{array}{lll} \nabla^2 T(x,y) = 0 & \text{para} & |x| < \frac{a}{2} \ \wedge \ y > 0 \\ T(\frac{a}{2}, y) = t_3 & \text{para} & y > 0 \\ T(-\frac{a}{2}, y) = t_1 & \text{para} & y > 0 \\ T(x, 0) = t_2 & \text{para} & x \in (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) \end{array}$$



    (b) En una placa semicircular de radio 1 en el semiplano superior sabiendo que la temperatura se mantiene a $0°C$ sobre el eje horizontal, a $60°C$ sobre la parte de la semicircunferencia incluida en el semiplano izquierdo y a $20°C$ en el resto de la semicircunferencia.

15. (a) Hallar la temperatura en el semiplano superior si en su frontera se mantiene aislada en $(-a, a)$ $\quad (a > 0)$, está a $1°C$ en $(-\infty, -a)$ y a $0°C$ en (a, ∞).
    (b) Encontrar la temperatura en una placa semicircular de radio 1 en el semiplano superior que está aislada sobre la fronera circular y, sobre el eje real se mantiene a temperaturas de $0°C$ y $10°C$ del lado negativo y positivo respectivamente.